

Analisis dan Kontrol Optimal Sistem Gerak Satelit Menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin

Putri Saraswati, Mardlijah, dan Kamiran

Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi

Sepuluh Nopember (ITS)

e-mail: kamiran@matematika.its.ac.id

Abstrak—Satelit adalah benda yang mengorbit benda lain dengan periode revolusi dan rotasi tertentu. Ada dua jenis satelit yakni satelit alami dan satelit buatan. Satelit buatan diluncurkan menuju orbitnya pada posisi tertentu yang tidak terpengaruh oleh gaya-gaya gravitasi dan hanya bergerak mengikuti pergerakan bumi. Posisi ini disebut sebagai posisi geostasioner. Dalam peredarannya, walaupun orbit geostasioner dapat menjaga suatu satelit berada pada tempat yang tetap, tetapi satelit pada orbit ini tidak akan selalu berada pada orbitnya dikarenakan adanya perturbasi orbital. Sehingga dalam penelitian ini dibahas mengenai analisis dan kontrol optimal sistem gerak satelit untuk menstabilkan posisi satelit menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin. Hasil simulasi dari penelitian ini menunjukkan bahwa sistem gerak satelit dapat kembali ke posisi geostasionernya pada waktu 60s dengan kontrol yang diberikan berupa percepatan radial (u_1) dan percepatan tangensial (u_2) sebesar 0.005 serta dengan bobot c_1 dan c_2 berupa impuls dikali waktu per satuan jarak sebesar $c_1 = c_2 = 10$ sehingga menghasilkan energi optimal sebesar 0.0151.

Kata Kunci—Satelit, Sistem Gerak Satelit, Kontrol Optimal, Prinsip Minimum Pontryagin.

I. PENDAHULUAN

SATELIT adalah benda yang mengorbit benda lain dengan periode revolusi dan rotasi tertentu. Ada dua jenis satelit yakni satelit alami dan satelit buatan. Satelit alami adalah benda-benda luar angkasa bukan buatan manusia yang mengorbit sebuah planet atau benda lain yang lebih besar daripada dirinya, seperti misalnya bulan adalah satelit alami bumi. Sedangkan untuk satelit buatan adalah benda buatan manusia yang beredar mengelilingi benda lain misalnya satelit Palapa yang mengelilingi bumi. Satelit dapat dibedakan berdasarkan bentuk dan kegunaannya seperti: satelit cuaca, satelit komunikasi, satelit iptek dan satelit militer [1].

Satelit-satelit buatan tersebut diluncurkan menuju posisi tertentu yang tidak terpengaruh oleh gaya-gaya gravitasi dan hanya bergerak mengikuti pergerakan bumi. Posisi ini disebut sebagai posisi geostasioner. Dalam peredarannya, walaupun orbit geostasioner dapat menjaga suatu satelit berada pada tempat yang tetap di atas ekuator bumi, tetapi satelit pada orbit ini tidak akan selalu berada pada orbitnya dikarenakan adanya *perturbation* atau perturbasi orbital atau gangguan yang dapat menyebabkan satelit secara perlahan-lahan berpindah dari lokasi geostasionernya. Perturbasi orbital adalah fenomena di

mana orbit satelit berubah akibat satu atau lebih pengaruh eksternal seperti anomali distribusi gravitasi bumi, gangguan gaya tarik dari bulan, benturan meteor atau benda-benda lain, atau tekanan radiasi matahari [2]. Untuk mengembalikan satelit pada posisi semula memerlukan tindakan dari stasiun pengendali agar satelit tetap pada orbit yang seharusnya. Usaha yang dilakukan stasiun pengendali tersebut dinamakan *station keeping* [3]. *Station keeping* berupa manuver satelit yang terdiri dari manuver utara/selatan dan timur/barat. Dalam setiap kali manuver memerlukan untuk menghidupkan “thruster” yang menyebabkan gaya dorong untuk mengubah posisi satelit.

Sehingga dalam penelitian ini dibahas mengenai analisis dan kontrol optimal sistem gerak satelit untuk menstabilkan posisi satelit akibat gangguan atau pengaruh dari luar yang terjadi pada gerak satelit. Sehingga digunakan kontrol optimal dengan Prinsip Minimum Pontryagin.

II. TINJAUAN PUSTAKA

A. Satelit dan Orbit Satelit

Satelit adalah benda yang mengorbit benda lain dengan periode revolusi dan rotasi tertentu. Ada dua jenis satelit yaitu satelit alami dan satelit buatan. Satelit alami adalah salah satu benda luar angkasa yang telah ada (bukan buatan manusia) yang mengorbit suatu planet. Satelit alami bumi adalah bulan. Selama mengelilingi bumi, bulan mengalami tiga gerakan sekaligus, yaitu rotasi, revolusi bulan mengelilingi bumi dan revolusi bulan mengelilingi matahari. Sedangkan satelit buatan adalah salah satu benda luar angkasa buatan manusia yang mengorbit suatu planet yang dalam pembuatannya memiliki jenis dan fungsi tertentu dengan tujuan untuk kepentingan manusia.

Orbit merupakan jenis-jenis tempat beredarnya satelit mengelilingi permukaan bumi. Jika diklasifikasikan berdasarkan posisi satelit pada orbitnya, maka satelit-satelit buatan dibedakan menjadi 5 ketinggian, antara lain [1]:

1. Orbit Rendah (*Low Earth Orbit*, LEO): 300 – 1500 km di atas permukaan bumi.
2. Orbit Menengah (*Medium Earth Orbit*, MEO): 1500 – 36000 km.
3. Orbit Geosinkron (*Geosynchronous Orbit*, GSO): sekitar 36000 km di atas permukaan bumi.
4. Orbit Geostasioner (*Geostationary Orbit*, GEO): 35790 km di atas permukaan bumi.

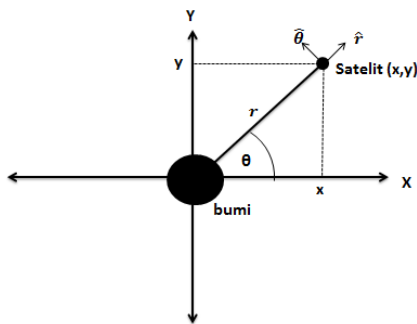
5. Orbit Tinggi (*High Earth Orbit*, HEO): di atas 36000 km.

Satelit GEO merupakan sebuah satelit yang ditempatkan dalam orbit yang posisinya tetap dengan posisi suatu titik di bumi. Karena mempunyai posisi yang tetap maka waktu edarnya pun sama dengan waktu rotasi bumi. Posisi orbit satelit GEO sejajar dengan garis khatulistiwa atau mempunyai titik lintang nol derajat.

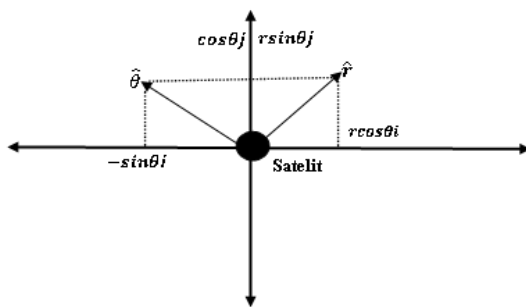
Satelit komunikasi dan satelit cuaca sering diorbitkan pada orbit geostasioner, sehingga antena satelit yang berkomunikasi dengannya tidak harus berpindah untuk melacaknya, tetapi dapat menunjuk secara permanen pada posisi di langit di mana mereka berada. Sebuah orbit geostasioner adalah satu tipe orbit geosynchronous. Gagasan tentang sebuah satelit geosynchronous untuk tujuan komunikasi pertama kali diterbitkan pada tahun 1928 oleh Herman Potocnik [4].

B. Model Matematika Sistem Gerak Satelit

Model gerak satelit yang dibahas adalah sistem gerak satelit yang dibawa kedalam koordinat kutub berdimensi dua, pergerakan satelit tersebut diamati secara radial/searah dengan pengamat (menjauhi atau mendekati pengamat) dan searah tangensial (gerak melingkari bumi) [5].



Gambar 1. Ilustrasi gerak satelit pada koordinat kutub (bumi).



Gambar 2. Ilustrasi gerak satelit pada koordinat kutub (Satelit).

Dari persamaan gaya pada arah radial dan pada arah tangensial, sistem persamaan gerak pada satelit dapat dituliskan:

$$\begin{cases} m(\ddot{r}(t) - r(t) \cdot \dot{\theta}^2(t)) = F_r - G \frac{Mm}{r^2(t)} \\ m(2\dot{r}(t) \cdot \dot{\theta}(t) + r(t) \cdot \ddot{\theta}(t)) = F_{\theta} \end{cases} \quad (1)$$

Misalkan $g = GM$, $u_1(t) = \frac{Fr}{m}$, $u_2(t) = \frac{F_{\theta}}{m}$, dan $r, \dot{r}, \ddot{r}, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ adalah fungsi waktu, maka sistem persamaan gerak satelit (1) dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{cases} \ddot{r}(t) = r(t) \cdot \dot{\theta}^2(t) - \frac{g}{r^2(t)} + u_1(t) \\ \ddot{\theta}(t) = \frac{-2\dot{r}(t) \cdot \dot{\theta}(t)}{r(t)} + \frac{1}{r(t)} u_2(t) \end{cases} \quad (2)$$

C. Prinsip Minimum Pontryagin

Pada prinsipnya, tujuan dari pengendalian optimal adalah menentukan signal atau kendali yang akan diproses dalam sistem dinamik dan memenuhi beberapa konstrain atau kendala, dengan tujuan memaksimalkan atau meminimumkan fungsi tujuan (J) yang sesuai [6].

Pada umumnya, masalah kendali optimal dalam bentuk ungkapan matematik dapat diformulasikan sebagai berikut, dengan tujuan mencari kendali $u(t)$ yang mengoptimalkan fungsi tujuan.

$$J(x) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt \quad (3)$$

dengan sistem dinamik yang dinyatakan oleh

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (4)$$

dan kondisi batas

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f \quad (5)$$

Langkah-langkah penyelesaian dari masalah kendali optimal yang diformulasikan oleh persamaan (3) - (5) adalah sebagai berikut[6]:

1. Bentuk Hamiltonian

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda'(t) f(x(t), u(t), t) \quad (6)$$

2. Minimumkan H terhadap $u(t)$ yaitu dengan cara:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

sehingga diperoleh kondisi stasioner

$$u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t) \quad (7)$$

3. Dengan menggunakan $u^*(t)$ yang telah dihasilkan pada langkah 2, akan didapatkan fungsi Hamilton baru yang optimal, $H^*(t)$, yaitu:

$$H^*(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = H(x^*(t), \lambda^*(t), t) \quad (8)$$

4. Selesaikan persamaan state dan costate

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H^*}{\partial \lambda} \quad \text{dan} \quad \dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x} \quad (9)$$

kondisi batas yang diberikan oleh keadaan awal dan keadaan akhir yang disebut kondisi transversality, yaitu:

$$\left(H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right)_{t_f} \delta t_f + \left(\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right)'_{t_f} \delta x_f = 0 \quad (10)$$

dengan S adalah bentuk Meyer dari fungsi tujuan J , H adalah persamaan Hamiltonian, δ menunjukkan variasi dan tanda * menunjukkan keadaan saat variabel kontrolnya stasioner.

5. Substitusi hasil-hasil yang diperoleh pada langkah 4 ke dalam persamaan $u^*(t)$ pada langkah 2 untuk mendapatkan kendali yang optimal.

Kondisi batas transversality dibedakan menjadi lima tipe berdasarkan perbedaan antara t_f dan state pada waktu akhir ($x(t_f)$), yaitu:

1. Waktu akhir dan state saat waktu akhir telah ditentukan atau diketahui

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ x(t_f) &= x_f \end{aligned} \quad (11)$$

2. Waktu akhir belum ditentukan atau tidak diketahui dan state saat waktu akhir telah ditentukan atau diketahui.

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ x(t_f) &= x_f \\ (H^* + \frac{\partial S}{\partial t})_{tf} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

3. Waktu akhir telah ditentukan atau diketahui sedangkan state saat waktu akhir belum diketahui atau tidak ditentukan.

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ \lambda^*(t_f) &= \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_{*tf} \end{aligned} \quad (13)$$

4. Waktu akhir belum ditentukan atau tidak diketahui dan state saat akhir belum ditentukan atau tidak diketahui dan nilainya bergantung pada sesuatu.

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ x(t_f) &= \theta(t_f) \\ \left(H^* + \frac{\partial S}{\partial t} + \left(\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right)' \dot{\theta}(t) \right)_{tf} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

5. Waktu akhir belum ditentukan atau tidak diketahui dan state saat akhir belum ditentukan atau tidak diketahui dan nilainya tidak bergantung pada sesuatu.

$$\begin{aligned} \delta x(t_0) &= x_0 \\ \left(H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right)_{tf} &= 0 \\ \left(\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right)_{tf} &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

D. Runge-Kutta Orde Empat

Metode Runge-Kutta adalah metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal dalam persamaan diferensial. Metode Runge-Kutta memberikan error yang lebih kecil dibanding dengan metode numerik yang lain seperti metode Euler dan metode Heun. Metode Runge-Kutta orde empat banyak digunakan karena memiliki tingkat ketelitian yang lebih tinggi.

Misal diberikan persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (16)$$

syarat batas $y(x_0) = y_0$. Secara iterasi penyelesaian Runge-Kutta orde empat adalah sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (17)$$

dengan,

$$h = \Delta x$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (18)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (19)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \quad (20)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + k_3) \quad (21)$$

III. ANALISIS DAN PEMBAHASAN

A. Analisis Kestabilan

Diberikan fungsi karakteristik dari matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Kemudian dicari determinan dari $(A - \lambda I)$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & -\lambda & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

Diperoleh 4 buah nilai eigen yaitu $(0, 0, \omega i, -\omega i)$ yang memiliki $Re(\lambda_i) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ sedemikian sehingga menurut teorema 2.1 sistem gerak satelit adalah sistem yang stabil jika multiplisitas aljabar sama dengan multiplisitas geometrinya, sedangkan sistem dikatakan tidak stabil jika multiplisitas aljabarnya lebih besar dari multiplisitas geometri.

Dari perhitungan multiplisitas didapatkan multiplisitas aljabarnya adalah 2 dan multiplisitas geometrinya adalah 1, sehingga multiplisitas aljabar lebih dari multiplisitas geometri, maka menurut teorema 2.1 dapat disimpulkan sistem gerak satelit adalah sistem yang tidak stabil.

B. Analisis Keterkontrolan

Pada pelinieran sistem gerak satelit telah diketahui matriks A dan matriks B sedemikian sehingga

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Selanjutnya dicari Rank dari $M_c = ([B \ AB \ A^2B \ A^3B])$.

Sehingga diperoleh:

$$M_c = [B \ F \ G \ H] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\omega & -\omega^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2\omega & -\omega^2 & 0 & 0 & -2\omega^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\omega & 0 & 0 & -4\omega^2 \\ 0 & 1 & -2\omega & 0 & 0 & -4\omega^2 & 2\omega^3 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Dapat diamati bahwa $rank(M_c) = 4$, sehingga menurut teorema 2.2 sistem gerak satelit adalah sistem yang terkontrol.

C. Analisis Keteramatan

Pada pelinieran sistem gerak satelit telah diketahui matriks A dan matriks C sedemikian sehingga

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\text{Selanjutnya dicari Rank dari } M_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Sehingga diperoleh:

$$M_0 = \begin{bmatrix} C \\ P \\ Q \\ S \end{bmatrix}$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 0 \\ -6\omega^3 & 0 & 0 & -4\omega^2 \end{bmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa $\text{rank}(M_0) = 4$, sehingga menurut teorema 2.3 sistem gerak satelit adalah sistem yang teramat.

D. Prinsip Minimum Pontryagin

Pada penelitian ini tujuan dari penyelesaian kontrol optimal adalah untuk menstabilkan posisi satelit pada posisi geostasionernya dengan kontrol ($u_1(t)$) dan kontrol ($u_2(t)$). Sehingga sistem dinamik dari sistem persamaan gerak satelit adalah sebagai berikut:

$$\dot{x}_1(t) = x_2 \quad (9)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1 x_4^2 - \frac{\sigma^3 \omega^2}{x_1^2} + u_1 \quad (10)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4 \quad (11)$$

$$\dot{x}_4(t) = -\frac{2x_2 x_4 + u_2}{x_1} \quad (12)$$

dengan $0 \leq u_1 \leq 1$ dan $0 \leq u_2 \leq 1$.

Fungsi tujuan untuk model diatas diberikan sebagai berikut:

$$J(x) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (c_1 u_1^2 + c_2 u_2^2) \quad (13)$$

Dari langkah-langkah penyelesaian Prinsip Minimum Pontryagin diperoleh fungsi Hamiltonian, persamaan *state*, dan persamaan *costate* sebagai berikut:

$$H^* = \frac{1}{2} c_1 u_1^2 + \frac{1}{2} c_2 u_2^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1 x_4^2 - \frac{\sigma^3 \omega^2}{x_1^2} \lambda_2$$

$$+ \lambda_2 u_1 + \lambda_3 x_4 - \frac{2x_2 x_4 + u_2}{x_1} \lambda_4 \quad (14)$$

Persamaan *state*:

$$\dot{x}_1(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} \right)_* = x_2^* \quad (15)$$

$$\dot{x}_2(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_2} \right)_* = x_1 x_4^2 - \frac{\sigma^3 \omega^2}{x_1^2} + u_1 \quad (16)$$

$$\dot{x}_3(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_3} \right)_* = x_4^* \quad (17)$$

$$\dot{x}_4(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_4} \right)_* = -\frac{2x_2 x_4 + u_2}{x_1} \quad (18)$$

Persamaan *costate*

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x_1} \right)_*$$

$$= -\left(x_4^2 \lambda_2 + \frac{2\sigma^3 \omega^2}{x_1^3} \lambda_2 + \frac{2x_2 x_4 - u_2}{x_1^2} \lambda_4 \right) \quad (19)$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x_2} \right)_* = -\left(\lambda_1 - \frac{2x_4}{x_1} \lambda_4 \right) \quad (20)$$

$$\dot{\lambda}_3(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x_3} \right)_* = 0 \quad (21)$$

$$\dot{\lambda}_4(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x_4} \right)_* = -(2x_1 x_4 \lambda_2 + \lambda_3 - \frac{2x_2}{x_1} \lambda_4) \quad (22)$$

E. Solusi Numerik

Persamaan *state* dan *costate* yang diperoleh merupakan persamaan nonlinier sehingga sulit untuk diselesaikan secara analitik, sehingga dalam penelitian ini persamaan *state* dan *costate* diselesaikan secara numerik. Penyelesaian numerik ini dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat Karena tingkat ketelitiannya cukup tinggi.

Pada *state* diketahui nilai awal maka untuk menyelesaikan persamaan *state* digunakan metode *forward sweep*. Sedangkan untuk persamaan *costate* digunakan metode *backward sweep* karena nilai akhir *costate* diketahui berdasarkan kondisi *transversality*. Sehingga metode yang digunakan adalah *forward-backward sweep* dengan solusi numerik yang digunakan adalah Runge-Kutta orde empat.

Langkah 1:

Interval waktu $t = [0, t_f]$ dibagi sebanyak n subinterval.

Langkah 2:

Memberikan inisialisasi nilai awal

$u_1, u_2, x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dan λ_4 dalam bentuk vektor nol sebanyak n .

Langkah 3:

Menggunakan nilai awal $u_1(0) = u_{10}, u_2(0) = u_{20}$,

$$x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}, x_3(0) = x_{30}, x_4(0) = x_{40}. \quad (23)$$

Langkah 4:

Menghitung nilai $u_1^* = \min \left\{ 1, \max \left(0, \frac{1}{c_1} (-\lambda_2) \right) \right\}$ dan

$$u_2^* = \min \left\{ 1, \max \left(0, \frac{1}{c_2 x_1} (-\lambda_4) \right) \right\}. \quad (24)$$

Langkah 5:

Menyelesaikan persamaan *state* secara *forward sweep*. Integrasi numerik dari persamaan *state* (14) sampai (17) dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat.

Langkah 6:

Menyelesaikan persamaan *costate* secara *backward sweep*. Integrasi numerik dari persamaan *costate* (18) sampai (21) dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat.

Langkah 7:

Memperbarui nilai u_1 dan u_2 dengan mensubstitusikan nilai $x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dan λ_4 yang baru ke dalam karakterisasi kontrol optimal.

F. Analisis dan Simulasi

Simulasi dengan metode numerik Runge-Kutta dengan nilai awal yang diberikan adalah sebagai berikut[6]:

$$x_1(0) = 1 \text{ km}$$

$$x_2(0) = 1 \text{ km/s}$$

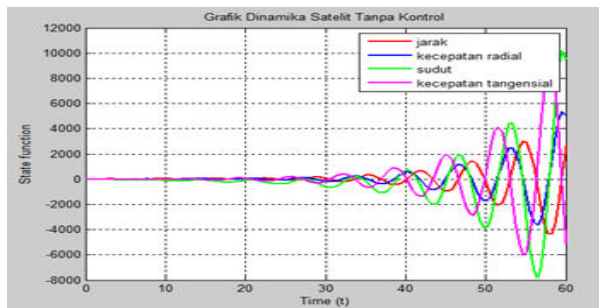
$$x_3(0) = 1 \text{ derajat}$$

$$x_4(0) = 1 \text{ derajat/s}$$

dengan x_1 menyatakan besar pergeseran jarak antara bumi dan satelit dari posisi geostasionernya, x_2 menyatakan besar

perubahan kecepatan radial satelit dari kecepatan radial geostasionernya, x_3 menyatakan besar pergeseran sudut yang dibentuk dari pergerakan satelit dari posisi geostasionernya, x_4 menyatakan besar perubahan kecepatan tangensial dari kecepatan tangensial geostasionernya.

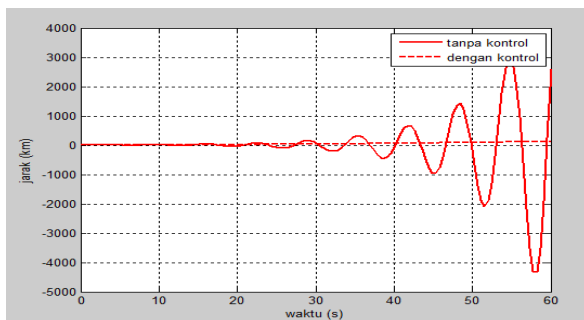
Simulasi dilakukan dengan $t_0 = 0$ dan $t_f = 60$ s. Simulasi pertama yang dilakukan adalah ketika sistem awal sebelum pemberian kontrol atau diasumsikan $u_1 = u_2 = 0$. Artinya tidak ada kontrol terhadap pergeseran atau perubahan yang terjadi pada sistem gerak satelit.



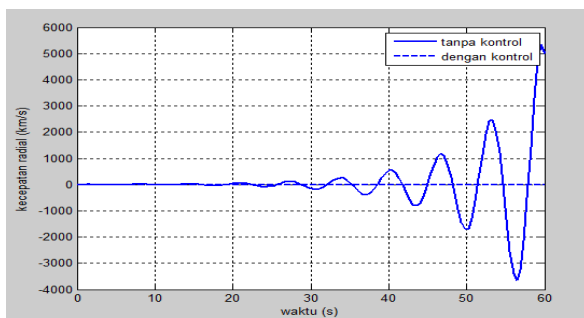
Gambar 1. Grafik x_1, x_2, x_3 , dan x_4 tanpa kontrol.

Pada gambar 1 terlihat bahwa sistem gerak satelit sebelum diberikan kontrol maka untuk t menuju tak hingga keadaan sistem gerak satelit yaitu x_1, x_2, x_3 , dan x_4 mengalami fluktuasi naik turun serta sistem tidak dapat kembali pada keadaan geostasionernya.

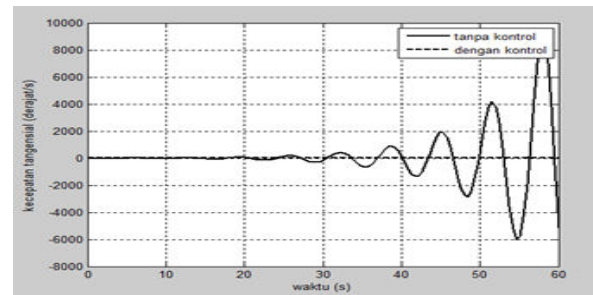
Selanjutnya dari kondisi awal tersebut dilakukan simulasi dengan pemberian kontrol u_1 dan u_2 dengan bobot yang diberikan adalah 10 dan 50. Berikut jika diberikan kondisi bobot kontrol u_1 lebih besar dari u_2 , bobot dari kontrol u_1 lebih kecil dari u_2 , dan bobot dari kontrol u_1 sama dengan u_2 .



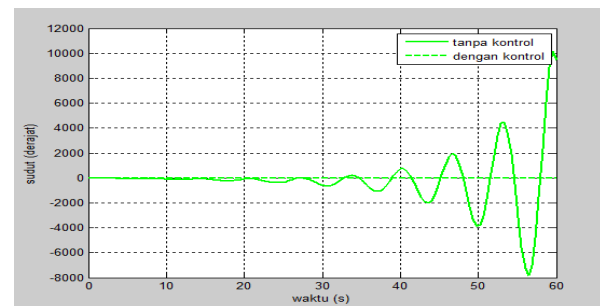
Gambar 2. Jarak (x_1).



Gambar 3. Kecepatan (x_2).



Gambar 4. Sudut (x_3).



Gambar 5. Kecepatan sudut (x_4).

Dari gambar 2 sampai gambar 5 tersebut terlihat bahwa ketika sistem gerak satelit mengalami perturbasi orbital yang berpengaruh pada pergeseran jarak, kecepatan, sudut, dan kecepatan sudut satelit pada posisi geostasionernya dan sebelum diberikan kontrol, grafik sistem gerak satelit mengalami fluktuasi naik turun dan tidak dapat kembali ke posisi geostasionernya.

Tetapi ketika sistem gerak satelit tersebut diberikan kontrol u_1 dan u_2 maka kontrol yang diberikan pada sistem dapat mengembalikan jarak antara satelit dan bumi pada posisi geostasionernya. Sehingga dapat dilihat pada grafik sistem gerak satelit setelah diberikan kontrol akan stabil berada pada keadaan geostasionernya.

Dengan pemberian bobot yang berbeda-beda berpengaruh pada nilai fungsi objektifnya sebagai berikut:

Tabel 1.
Nilai fungsi tujuan (J)

Bobot c_1	Bobot c_2	J
50	10	0.0452
10	50	0.0452
10	10	0.0151
50	50	0.0753

Dapat ditarik kesimpulan bahwa fungsi tujuan J optimal ($J = 0.0151$) ketika diberikan bobot yang sama yaitu $c_1 = c_2 = 10$ dan kontrol u_1 dan u_2 sebesar 0.005.

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan analisis hasil simulasi pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Sistem gerak satelit adalah sistem yang tidak stabil karena semua nilai eigen bagian real semua bernilai nol. Sistem juga bersifat terkontrol dan teramati. Sehingga

kontrol optimal dengan Prinsip Minimum Potryagin dapat diterapkan pada sistem gerak satelit.

2. Dari hasil simulasi sistem awal dari model gerak satelit saat terkena pengaruh dari luar atau gangguan, grafik mengalami fluktuasi naik turun artinya sistem gerak satelit rentan terhadap gangguan dan tidak bisa kembali ke posisi sebelumnya.
3. Hasil simulasi dengan pemberian kontrol yaitu dapat mengembalikan posisi satelit ke posisi geostasionernya pada waktu 60s secara optimal dengan bobot $c_1 = c_2 = 10$ dengan besar energi optimal $J = 0.0151$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] S. Kusmaryanto, "Orbit Satelit," 2013. [Online]. Available: <http://sigitkus.lecture.ub.ac.id/?p=1691>.
- [2] M. Lestari, "Satelit Geostasioner: Academia." [Online]. Available: www.academia.edu/16540093/SATELIT_GEOSTASIONER.
- [3] S. Suprpto, P. Pangaribuan, and G. Jonathan, "Analisa Kebutuhan Bahan Bakar Satelit Palapa C2 Untuk Keperluan Station Keeping," *J. Tek. Telekomun.*, 2009.
- [4] Wikipedia, "Satelit." [Online]. Available: <https://id.m.wikipedia.org/wiki/Satelit>.
- [5] R. Arrosyid, "Pengendalian Gerak Satelit dengan Menggunakan Metode Linier Quadratic Regulator (LQR)," Yogyakarta, 2014.
- [6] D. S. Naidu, *Optimal Control Systems*. USA: CRC Press LLC, 2002.